

1 Auswertung

Im folgenden werden aus den Messwerten die Phasen-, Gruppengeschwindigkeit und ihre Fehler bestimmt. Die Wassertemperatur bei der Messung lag bei $22,1^\circ\text{C} \pm 0,1^\circ\text{C}$.

1.1 Phasengeschwindigkeit

Berechnung der Phasengeschwindigkeit aus den Messungen. Die Frequenz bei der Messung war $13,97 \pm 0,01\text{kHz}$. Die Phasengeschwindigkeit erhält man aus folgen-

Höhe [cm] $\pm 1\text{mm}$	Position des 0.ten Minima [cm] x_0	Position des n.ten Maxima [cm] x_n	Anzahl n der Minimas
13	$124,0 \pm 0,1$	$6,5 \pm 0,1$	19
12	$124,3 \pm 0,1$	$4,4 \pm 0,1$	19
11	$130,7 \pm 0,1$	$8,7 \pm 0,3$	19
10	$131,4 \pm 0,1$	$11,6 \pm 0,2$	19
9	$130,2 \pm 0,1$	$11,7 \pm 0,2$	19
8	$132,5 \pm 0,1$	$2,9 \pm 0,2$	19
7	$123,9 \pm 0,2$	$60,8 \pm 0,1$	19

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung der Phasengeschwindigkeit

den Formeln:

$$c_{\text{Phasen}} = 2\nu \frac{\Delta l}{n} \text{ Phasengeschwindigkeit} \quad (1)$$

$$\Delta c_{\text{Phasen}} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta l}{n} \Delta \nu\right)^2 + \left(\frac{2\nu}{n} \Delta \Delta l\right)^2} \text{ Fehler der Phasengeschwindigkeit} \quad (2)$$

$$\Delta l = x_0 - x_n \text{ Weglänge zwischen 0.ten und n.ten Minima} \quad (3)$$

$$\Delta \Delta l = \sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta x_n^2} \text{ Fehler der Längenmessung} \quad (4)$$

Die berechneten Phasengeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Wasserhöhe:

Höhe [cm] $\pm 1\text{mm}$	Phasengeschwindigkeit $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
13	$1727,9 \pm 2,4$
12	$1763,2 \pm 2,4$
11	$1794,0 \pm 4,8$
10	$1859,6 \pm 3,7$
9	$1947,6 \pm 3,9$
8	$2130,0 \pm 4,0$
7	$2518,6 \pm 9,1$

1.2 Gruppengeschwindigkeit

1.2.1 Methode 1

Berechnung der Gruppengeschwindigkeit mit den Messergebnis aus Methode 1. Die $\frac{V_{olt}}{D_{iv}}$ war bei dem Versuch $0,5 \frac{ms}{cm}$. Die Weglänge wurde bestimmt durch die Position des Empfängers x_s und die Position des Reflektor x_r .

$$x_s = (5 \pm 0,1)cm \quad (5)$$

$$x_r = (145 \pm 0,2)cm \quad (6)$$

$$\Delta l = x_s - x_r = 140cm \text{ Weglänge} \quad (7)$$

$$\Delta \Delta l = \sqrt{0,1^2 + 0,2^2}cm = 0,22cm \text{ Fehler der Weglänge} \quad (8)$$

Höhe [cm] $\pm 1mm$	Ablesung Δx vom Oszi [cm]
12,8	$4,4 \pm 0,1$
12	$4,6 \pm 0,1$
11	$4,7 \pm 0,1$
10	$4,9 \pm 0,2$
9	$5,1 \pm 0,1$
8	$5,5 \pm 0,1$
7	$6,1 \pm 0,2$

Die Gruppengeschwindigkeit erhält man mit

$$c_{Gruppe} = \frac{2\Delta l}{\Delta x VDIV} \text{ Gruppengeschwindigkeit} \quad (9)$$

$$\Delta c_{Gruppe} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta \Delta l}{\Delta x VDIV}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta l \Delta \Delta x}{\Delta x^2 VDIV}\right)^2} \text{ Fehler von } c_{Gruppe} \quad (10)$$

$$VDIV = 0,5 \frac{ms}{cm} \text{ Umrechnungsfaktor für Oszi Strecke} \rightarrow \text{Zeit} \quad (11)$$

Berechnete Gruppengeschwindigkeit in Abhängigkeit der Wasserhöhe:

Höhe [cm] $\pm 1mm$	Gruppengeschwindigkeit $\left[\frac{m}{s}\right]$
12,8	$1272,7 \pm 29,0$
12	$1217,4 \pm 26,5$
11	$1191,5 \pm 25,4$
10	$1142,9 \pm 46,7$
9	$1098,0 \pm 21,6$
8	$1018,2 \pm 18,6$
7	$918,0 \pm 30,1$

1.2.2 Methode 2

Berechnung der Gruppengeschwindigkeit mit den Messergebnis aus Methode 2. Die Weglänge ist diesselbe wie bei Methode 1. Die Untersetzungsfaktor war 2. Der Fehler der Messung ist größer als normal, da die letzte Anzeigeziffer nicht eindeutig ablesbar war(s. Bemerkungen in den Messprotokoll). Der Fehler des Digitalfrequenzmesser ist also immer $\Delta\Delta t = 0,05ms$.

Höhe [cm] $\pm 1mm$	Anzeige Δt des Digitalfrequenzmesser Δt [ms]
13	2,45
12	2,55
11	2,65
10	2,65
9	2,65
8	2,85
7	3,25

Die Gruppengeschwindigkeit erhält man mit

$$c_{Gruppe} = \frac{2\Delta l}{\Delta t} \text{ Gruppengeschwindigkeit} \quad (12)$$

$$\Delta c_{Gruppe} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta\Delta l}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta l\Delta\Delta t}{\Delta t^2}\right)^2} \text{ Fehler von } c_{Gruppe} \quad (13)$$

Berechnete Gruppengeschwindigkeit in Abhängigkeit der Wasserhöhe:

Höhe [cm] $\pm 1mm$	Gruppengeschwindigkeit [$\frac{m}{s}$]
13	$1142,9 \pm 23,4$
12	$1098,0 \pm 21,6$
11	$1056,6 \pm 20,0$
10	$1056,6 \pm 20,0$
9	$1056,6 \pm 20,0$
8	$982,5 \pm 17,3$
7	$861,5 \pm 13,3$

1.3 Aufgabe 1

Die berechneten Werte werden nun umgerechnet für die Diagramme.

1.3.1 Phasengeschwindigkeit

$$x_{Achse} = \frac{1}{h^2} \text{Kehrwert der Höhe zum Quadrat} \quad (14)$$

$$\Delta x_{Achse} = \frac{2\Delta h}{h^3} \text{Fehler des Kehrwerts} \quad (15)$$

$$y_{Achse} = \frac{1}{c_{Phase}^2} \text{Kehrwert von } c_{Phase} \text{ zum Quadrat} \quad (16)$$

$$\Delta y_{Achse} = \frac{2\Delta c_{Phase}}{c_{Phase}^3} \text{Fehler des Kehrwerts} \quad (17)$$

Umgerechnete Koordinaten:

x_{Achse} $[m^{-2}] \cdot 20$	y_{Achse} $\left[\frac{s^2}{m^2}\right] \cdot \frac{10^{-7}}{3}$
2,96 ± 0,05	10,05 ± 0,03
3,47 ± 0,06	9,65 ± 0,03
4,13 ± 0,08	9,32 ± 0,05
5,00 ± 0,10	8,68 ± 0,04
6,17 ± 0,14	7,91 ± 0,03
7,81 ± 0,20	6,61 ± 0,03
10,20 ± 0,29	4,73 ± 0,03

1.3.2 Gruppengeschwindigkeit Methode 1

$$x_{Achse} = \frac{1}{h^2} \text{Kehrwert der Höhe zum Quadrat} \quad (18)$$

$$\Delta x_{Achse} = \frac{2\Delta h}{h^3} \text{Fehler des Kehrwerts} \quad (19)$$

$$y_{Achse} = \frac{1}{c_{Gruppe}^2} \text{Kehrwert von } c_{Gruppe} \text{ zum Quadrat} \quad (20)$$

$$\Delta y_{Achse} = \frac{2\Delta c_{Gruppe}}{c_{Gruppe}^3} \text{Fehler des Quadrats} \quad (21)$$

Umgerechnete Koordinaten:

x_{Achse} $[m^{-2}] \cdot 20$	y_{Achse} $\left[\frac{m^2}{s^2}\right] \cdot 2 \cdot 10^5$
3,05 ± 0,05	8,1 ± 0,4
3,47 ± 0,06	7,4 ± 0,3
4,13 ± 0,08	7,1 ± 0,3
5,00 ± 0,10	6,5 ± 0,5
6,17 ± 0,14	6,0 ± 0,2
7,81 ± 0,20	5,2 ± 0,2
10,20 ± 0,29	4,2 ± 0,3

1.3.3 Gruppengeschwindigkeit Methode 2

Die Messpunkte lag nicht auf einer richtigen Gerade, wodurch die Extrapolation erschwert wurde. Das Einzeichnen der Rezessionsgeraden wurde dadurch sehr erschwert.

$$x_{Achse} = \frac{1}{h^2} \text{Kehrwert der Höhe zum Quadrat} \quad (22)$$

$$\Delta x_{Achse} = \frac{2\Delta h}{h^3} \text{ Fehler des Kehrwerts} \quad (23)$$

$$y_{Achse} = c_{Gruppe}^2 \quad c_{Gruppe} \text{ zum Quadrat} \quad (24)$$

$$\Delta y_{Achse} = 2\Delta c_{Gruppe} c_{Gruppe} \text{ Fehler des Quadrats} \quad (25)$$

Umgerechnete Koordinaten:

x_{Achse} $[m^{-2}] \cdot 20$	y_{Achse} $\left[\frac{m^2}{s^2}\right] \cdot 2 \cdot 10^5$
$2,96 \pm 0,05$	$6,5 \pm 0,3$
$3,47 \pm 0,06$	$6,0 \pm 0,2$
$4,13 \pm 0,08$	$5,6 \pm 0,2$
$5,00 \pm 0,10$	$5,6 \pm 0,2$
$6,17 \pm 0,14$	$5,6 \pm 0,2$
$7,81 \pm 0,20$	$4,8 \pm 0,2$
$10,20 \pm 0,29$	$3,7 \pm 0,1$

1.4 Aufgabe 2

Aus Diagramm 1 wurden folgende Werte für die Achsenabschnitte abgelesen:

- $\frac{1}{h^2}$ -Achse:

$$x = \frac{1}{h_{Grenzph}^2} = (336 \pm 14)m^{-2}$$

- $\frac{1}{c_{Ph}}$ -Achse:

$$y = \frac{1}{c_{Ph}^2(b = 13cm)} = (12,3 \pm 0,4) \cdot \frac{10^{-7}s^2}{3m^2}$$

Man erhält $h_{Grenzph}$ und c_{Ph} mit

$$h_{Grenzph} = \sqrt{\frac{1}{x}} \text{ Bestimmung von } h_{Grenzph} \quad (26)$$

$$\Delta h_{Grenzph} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\Delta x \text{ Fehler von } h_{Grenzph} \quad (27)$$

$$c_{Ph}(b = 13cm) = \sqrt{\frac{1}{y}} \text{ Bestimmung von } c_{Ph} \quad (28)$$

$$\Delta c_{Ph}(b = 13cm) = \frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \Delta y \text{ Fehler von } c_{Ph} \quad (29)$$

$$(30)$$

Einsetzen der Werte:

$$\begin{aligned} h_{Grenzph} &= (5,5 \pm 0,1)cm \\ &= 5,5cm \pm 2,1\% \\ c_{Ph}(b = 13cm) &= (1562 \pm 25) \frac{m}{s} \\ &= 1562 \frac{m}{s} \pm 1,6\% \end{aligned}$$

Aus Diagramm 2 (Gruppengeschwindigkeit nach Methode 2) wurden folgende Werte für die Achsenabschnitte abgelesen:

- $\frac{1}{h^2}$ -Achse:

$$x = \frac{1}{h_{GrenzgrMethode2}^2} = (380 \pm 32)m^{-2}$$

- c_{gr}^2 -Achse:

$$y = c_{GruppeMethode2}^2(b = 13cm) = (8,1 \pm 0,8) \cdot \frac{2 \cdot 10^5 m^2}{s^2}$$

Man erhält $h_{GrenzgrMethode2}$ und $c_{GruppeMethode2}$ mit

$$h_{GrenzgrMethode2} = \sqrt{\frac{1}{x}} \text{ Bestimmung von } h_{GrenzgrMethode2} \quad (31)$$

$$\Delta h_{GrenzgrMethode2} = \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \Delta x \text{ Fehler von } h_{GrenzgrMethode2} \quad (32)$$

$$c_{GruppeMethode2}(b = 13cm) = \sqrt{y} \text{ Bestimmung von } c_{GruppeMethode2} \quad (33)$$

$$\Delta c_{GruppeMethode2}(b = 13cm) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Delta y \text{ Fehler von } c_{GruppeMethode2} \quad (34)$$

$$(35)$$

Einsetzen der Werte:

$$\begin{aligned} h_{GrenzgrMethode2} &= (5,1 \pm 0,2)cm \\ &= 5,1cm \pm 4,2\% \\ c_{GruppeMethode2}(b = 13cm) &= (1273 \pm 63) \frac{m}{s} \\ &= 1273 \frac{m}{s} \pm 4,9\% \end{aligned}$$

Aus Diagramm 3 (Gruppengeschwindigkeit nach Methode 1) wurden folgende Werte für die Achsenabschnitte abgelesen:

- $\frac{1}{h^2}$ -Achse:

$$x = \frac{1}{h_{GrenzgrMethode1}^2} = (366 \pm 36)m^{-2}$$

- c_{gr}^2 -Achse:

$$y = c_{GruppeMethode1}^2(b = 13cm) = (9,3 \pm 0,7) \cdot \frac{2 \cdot 10^5 m^2}{s^2}$$

Man erhält $h_{GrenzgrMethode1}$ und $c_{GruppeMethode1}$ mit

$$h_{GrenzgrMethode1} = \sqrt{\frac{1}{x}} \text{ Bestimmung von } h_{GrenzgrMethode1} \quad (36)$$

$$\Delta h_{GrenzgrMethode1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \Delta x \text{ Fehler von } h_{GrenzgrMethode1} \quad (37)$$

$$c_{GruppeMethode1}(b = 13cm) = \sqrt{y} \text{ Bestimmung von } c_{GruppeMethode1} \quad (38)$$

$$\Delta c_{GruppeMethode1}(b = 13cm) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Delta y \text{ Fehler von } c_{GruppeMethode1} \quad (39)$$

$$(40)$$

Einsetzen der Werte:

$$\begin{aligned} h_{GrenzgrMethode1} &= (5,2 \pm 0,3)cm \\ &= 5,2cm \pm 4,9\% \\ c_{GruppeMethode1}(b = 13cm) &= (1364 \pm 51) \frac{m}{s} \\ &= 1364 \frac{m}{s} \pm 3,8\% \end{aligned}$$

1.4.1 Mittelung der beiden Messwerte aus den beiden Methoden

Die Mittelung wird gemacht, da beiden Messwerte ungefähr gleich große Fehler habe und sich überlappen. Es kann keine Aussage darüber gemacht werden welcher dieser extrapolierten Werte der bessere ist. Mittelung der Grenzhöhe:

$$h_{Grenzgr} = \frac{h_{GrenzrgMethode1} + h_{GrenzgrMethode2}}{2} \quad (41)$$

$$\Delta h_{Grenzgr} = \sqrt{\Delta h_{GrenzgrMethode1}^2 + \Delta h_{GrenzgrMethode2}^2} \quad (42)$$

Einsetzen der Werte:

$$\begin{aligned} h_{Grenzgr} &= (5.2 \pm 0.3)cm \\ &= 5.2cm \pm 4.9\% \end{aligned}$$

Mittelung der Gruppengeschwindigkeiten aus beiden Methoden:

$$c_{gr} = \frac{c_{GruppeMethode1} + c_{GruppeMethode2}}{2} \quad (43)$$

$$\Delta c_{gr} = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta c_{GruppeMethode1}^2 + \Delta c_{GruppeMethode2}^2} \quad (44)$$

Einsetzen der Werte:

$$\begin{aligned} c_{gr} &= (1319 \pm 41) \frac{m}{s} \\ &= 1319 \frac{m}{s} \pm 3,1\% \end{aligned}$$

1.5 Aufgabe 4

Bei einer Temperatur von $22^\circ C$ ist Schallgeschwindigkeit in Wasser laut Tabelle

$$c = (1489 \pm 0,5) \frac{m}{s}.$$

Die Frequenz betrug bei der Phasengeschwindigkeit

$$\nu_{Ph} = 13,97 kHz \pm 0,005 kHz.$$

Die Frequenz betrug bei der Gruppengeschwindigkeit (laut Skript)

$$\nu_{gr} = 13,8 kHz \pm 0,05 kHz.$$

Die Breite der Wasserrinne beträgt

$$b = (13 \pm 0,5) cm.$$

Es wurden die Moden $n = m = 1$ angeregt.

1.5.1 Grenzhöhe

Berechnung von $h_{Grenztheoph}$ für die Frequenz bei der Phasengeschwindigkeit:

$$h_{Grenztheoph} = \frac{c}{2\nu_{Ph}} \quad (45)$$

$$\Delta h_{Grenztheoph} = \sqrt{\left(\frac{\Delta c}{2\nu_{Ph}}\right)^2 + \left(\frac{c\Delta\nu_{Ph}}{2\nu_{Ph}^2}\right)^2} \quad (46)$$

$$(47)$$

Einsetzen der Werte:

$$\begin{aligned} h_{Grenztheoph} &= (5,329 \pm 0,003) cm \\ &= 5,329 cm \pm 0,049\% \end{aligned}$$

Berechnung von $h_{Grenztheogr}$ für die Frequenz bei der Gruppengeschwindigkeit:

$$h_{Grenztheogr} = \frac{c}{2\nu_{gr}} \quad (48)$$

$$\Delta h_{Grenztheo} = \sqrt{\left(\frac{\Delta c}{2\nu_{gr}}\right)^2 + \left(\frac{c\Delta\nu_{gr}}{2\nu_{gr}^2}\right)^2} \quad (49)$$

$$(50)$$

Einsetzen der Werte:

$$\begin{aligned} h_{Grenztheogr} &= (5,395 \pm 0,020)cm \\ &= 5,395cm \pm 0,364\% \end{aligned}$$

1.5.2 Phasengeschwindigkeit

Berechnung von $c_{Phtheo}(b = 13cm)$:

$$c_{Phtheo} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(m\frac{c}{2b\nu}\right)^2}} \quad (51)$$

$$\Delta c_{Phtheo} = \frac{2c^3\nu}{(4b^2\nu^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \Delta b \quad \Delta b \text{ ist der bestimmende Fehler} \quad (52)$$

$$(53)$$

Einsetzen der Werte:

$$\begin{aligned} c_{Phtheo} &= (1632 \pm 13) \frac{m}{s} \\ &= 1632 \frac{m}{s} \pm 0,78\% \end{aligned}$$

1.5.3 Gruppengeschwindigkeit

Berechnung von $c_{grtheo}(b = 13cm)$:

$$c_{grtheo} = c \sqrt{1 - \left(m\frac{c}{2b\nu_{gr}}\right)^2} \quad (54)$$

$$\Delta c_{grtheo} = \frac{c^3}{2\sqrt{4b^2\nu_{gr}^2 - c^2b^2\nu_{gr}}} \Delta b \quad \Delta b \text{ ist der bestimmende Fehler} \quad (55)$$

Einsetzen der Werte:

$$\begin{aligned} c_{grtheo} &= (1355 \pm 11) \frac{m}{s} \\ &= 1355 \frac{m}{s} \pm 0,8\% \end{aligned}$$

Art	Grenzhöhe Phase	Grenzhöhe Gruppe
experimentell	$(5, 5 \pm 0, 1)cm$	$(5, 2 \pm 0, 3)cm$
theoretisch	$(5, 329 \pm 0, 003)cm$	$(5, 395 \pm 0, 020)cm$

Art	c_{Ph}	c_{gr}
experimentell	$(1562 \pm 25) \frac{m}{s}$	$(1319 \pm 41) \frac{m}{s}$
theoretisch	$(1632 \pm 13) \frac{m}{s}$	$(1355 \pm 11) \frac{m}{s}$

1.5.4 Zusammenfassung und Vergleich

Die berechneten Werte bei der Gruppengeschwindigkeit stimmt mit den experimentellen Werten überein im Rahmen der Fehlergrenzen. Bei der Grenzhöhe für die Phasengeschwindigkeit ist der experimentelle Wert größer als der berechnete Wert. Die gemessene Phasengeschwindigkeit ist kleiner als der berechnete Wert.

1.6 Aufgabe 5

Zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit im Wasser bei einer Temperatur T werden die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten, die in Aufgabe 2 bestimmt wurden, miteinander multipliziert und daraus die Wurzel gezogen. Bei dieser Rechnung wird ein systematischer Fehler gemacht, da die Frequenz bei der Gruppengeschwindigkeitsmessung verschieden war zu der Frequenz bei der Phasengeschwindigkeitsmessung ($\nu_{Ph} = 13,97kHz$, $\nu_{gr} = 13,8kHz$). Da die Frequenz ziemlich nahe beieinanderliegen wird vorerst darauf keine Rücksicht genommen.

Mit

$$c = \sqrt{c_{Ph}c_{Gruppe}} \quad \text{Schallgeschwindigkeit} \quad (56)$$

$$\Delta c = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{c_{Gruppe}}\Delta c_{Ph}}{2\sqrt{c_{Ph}}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{c_{Ph}}\Delta c_{Gruppe}}{2\sqrt{c_{Gruppe}}}\right)^2} \quad (57)$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$\begin{aligned} c &= (1435 \pm 25) \frac{m}{s} \\ &= 1435 \frac{m}{s} \pm 1,7\% \end{aligned}$$

Der Tabellenwert liegt bei $1489 \frac{m}{s}$ und liegt nicht in den Fehlergrenzen des gemessenen Wertes c. Er liegt 3,8% oberhalb des gemessenen Wertes.

Verwendet man die theoretische Formel um den Fehler abzuschätzen, der durch den Frequenzunterschied auftreten sollte so erhält man:

$$\Delta c_{Gruppe,\nu} = c_{Gruppe}(b = 13cm, 13,97kHz) - c_{Gruppe}(b = 13cm, 13,8kHz) \approx 5 \frac{m}{s}$$

Diesen Wert muß man jetzt zu dem Fehler von c_{Gruppe} dazuaddieren. Mit Berücksichtigung dieses Fehlers wird die Schallgeschwindigkeit zu

$$\begin{aligned} c &= (1435 \pm 27) \frac{m}{s} \\ &= 1435 \frac{m}{s} \pm 1,9\% \end{aligned}$$

Dies reicht aber nicht aus um die Lücke zwischen dem gemessenen Wert und dem Tabellenwert zu schließen.